Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Seleção de Mestrado: Análise Real

Data: 18 de julho de 2023 **Horário**: 09h às 12h

Inscrição: ______________________________

Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $a > 0$. Defina uma sequência real (x_n) de modo que $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, para cada natural $n \geq 2$. A sequência (x_n) é convergente?

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Limite de uma sequência.

   Solução: Primeiro mostraremos por indução finita que (x_n) é crescente. De fato, como $a > 0$ temos $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + x_1} = x_2$ e supondo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < x_{n+1}$ temos $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + x_{n+1}} = x_{n+2}$. Agora mostraremos que (x_n) é limitada. De fato, como $x_n < x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ temos $x_n^2 - x_n - a < 0$ e consequentemente $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < x_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Já que (x_n) é monótona e limitada concluímos que (x_n) é convergente.

2. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ é convergente.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Séries convergentes e Testes de convergência.

   Solução: Inicialmente, note que $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente. De fato, pelo teste da integral, tomando $f(x) = \frac{1}{x^2}$, temos que

   $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = 1.$$

   Isto implica que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$é convergente. Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ é absolutamente convergente e portanto convergente.

3. Dado $n \in \mathbb{N}$ calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

   Pontuação: 1,25.

Assunto: Limites no infinito e Fórmula de Taylor.

Solução: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ é uma função de classe C^∞, pois $f^{(j)}(x) = e^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $j \in \{0, 1, \dots\}$. Dado $x > 1$, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, existe $x_0 \in (1, x)$ tal que

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{e}{j!}(x-1)^j + \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}.$$

Logo, $0 \leq \frac{x^n}{e^x} < x^n \frac{(n+1)!}{(x-1)^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-n} \frac{(n+1)!}{(x-1)}$. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-n} \dfrac{(n+1)!}{(x-1)} = 0$ concluímos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

4. Se $F \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado e $x \in \mathbb{R}$ é um ponto fixado, mostre que exite $y_0 \in F$ tal que a distância entre x e F é dada por $d(x, F) = |x - y_0|$.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Limite de uma sequência, conjuntos fechados e conjuntos compactos

   Solução: A distância entre o ponto x e um conjunto F é dada por

$$d(x, F) = \inf\{|x - y|; y \in F\}.$$

   Seja $\{y_n\}_n \subset F$ uma sequência de pontos tal que

$$\lim |x - y_n| = \inf\{|x - y|; y \in F\} = d(x, F).$$

   Em particular, $\{y_n\}_n$ é uma sequência limitada. De fato, para n suficientemente grande,

$$|y_n| = |y_n - x + x| \leq |y_n - x| + |x| \leq d(x, F) + 1 + |x|.$$

   Como F é um conjunto fechado e a sequência $\{y_n\}_n$ é limitada, temos que $\{y_n\}_n$ possui uma subsequência convergente $\{y_{n_k}\}_k$ que converge para um ponto de F. Ou seja, existe $y_0 \in F$ tal que $\lim_k y_{n_k} = y_0$. Pela continuidade da função módulo, temos que

$$\lim |x - y_{n_k}| = |x - y_0|.$$

   Daí segue o resultado.

5. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *localmente constante* se para cada $x \in \mathbb{R}$, existem $c \in \mathbb{R}$ e um intervalo aberto I contendo x tal que $f(y) = c$ para todo $y \in I$. Mostre que se f é contínua e localmente constante então f é constante. **Dica:** Fixado $a \in \mathbb{R}$ mostre que $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(a)\}$ é aberto e fechado.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Conjuntos abertos e fechados

   Solução: Como f é contínua e $\mathbb{R} \setminus \{f(a)\}$ é aberto temos que $\mathbb{R} \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(a)\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{f(a)\})$ é aberto. Consequentemente A é fechado. Por outro lado, dado

$x_0 \in A$ temos que $f(x_0) = f(a)$. E, como f é localmente constante temos que existe $r > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Em particular $c = f(x_0) = f(a)$. Assim, $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Concluindo que A é aberto. Como $\mathbb{R}$ é conexo, $A \neq \emptyset$ e $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e fechado concluímos que $A = \mathbb{R}$.

6. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que $|f'(t)| \leq g'(t)$ para todo $t \in (a, b)$. Mostre que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: : Os teoremas clássicos do Cálculo Integral.

   Solução: Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)|dt \leq \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a).$$

7. Sejam $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Mostre que

$$\int_a^b \phi(t)\psi'(t)dt = \phi(t)\psi(t)\Big|_a^b - \int_a^b \phi'(t)\psi(t)dt.$$

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: : Os teoremas clássicos do Cálculo Integral.

   Solução: Como $[\phi(t)\psi(t)]' = \phi'(t)\psi(t) + \phi(t)\psi'(t)$, temos

$$\int_a^b [\phi(t)\psi(t)]'dt = \int_a^b \phi'(t)\psi(t)dt + \int_a^b \phi(t)\psi'(t)dt.$$

   Por outro lado, pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\int_a^b [\phi(t)\psi(t)]'dt = \phi(t)\psi(t)\Big|_a^b,$$

   o resultado segue.

8. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $m = \frac{a+b}{2}$. Mostre que

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b [f(x) + (x - m)f'(x)]dx = f(a) + f(b).$$

   Dica: Use o exercício acima.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Propriedades da integral.

Solução: Como f e f' são integráveis (pois são contínuas), integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x)+(x-m)f'(x)]dx &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{2}{b-a}\int_a^b (x-m)f'(x)dx \\
&= \frac{2}{b-a}\left([(x-m)f(x)]_a^b - \int_a^b (x-m)f'(x)dx + \int_a^b (x-m)f'(x)dx\right) \\
&= \frac{2}{b-a}\left[(b-m)f(b)-(a-m)f(a)\right] \\
&= \frac{2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2}f(b) - \frac{a-b}{2}f(a)\right] = f(b)+f(a).
\end{aligned}$$